توظيف الأعداد المركّبة في الهندسة

في كل ما يلي، نفرض أنّ المستوي المركّب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$. ترمز z_A ؛ z_B ؛ z_C ؛ z_D إلى لواحق النقط A، B، C، D على الترتيب.

I. معلومات أوّليّة:

تمهيد:

1. لاحقة الشعاع $\overrightarrow{OA}$ هي z_A. 2. لاحقة الشعاع $\overrightarrow{OB}$ هي z_B.
3. لاحقة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي $z_B - z_A$.

التفسير الهندسي للطويلة:

1. $|z_A|=OA$ ؛ $|z_B|=OB$ ؛ $|z_B-z_A|=AB$.
2. $\left|\frac{z_A}{z_B}\right|=\frac{OA}{OB}$ ؛ حيث $B\neq O$.
3. $\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=\frac{AC}{AB}$ ؛ حيث $A\neq B$.

تعريف العمدة و تفسيرها الهندسي:

1. $\arg(z_A)=(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})$ ؛ حيث $z_A\neq 0$.
2. $\arg(z_B-z_A)=(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{AB})$ ؛ حيث $A\neq B$.
3. $\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)=(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ ؛ حيث $A\neq O$ و $B\neq O$.
4. $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$ ؛ حيث $A\neq B$ و $A\neq C$.

II. توظيف الأعداد المركّبة في حلّ مسائل الهندسة:

تداور النقط:

1. إذا كان $|z_A|=|z_B|=|z_C|=|z_D|=r$ ، نستنتج أنّ النّقط A، B، C، D تنتمي إلى نفس الدّائرة ذات المركز O و نصف القطر r.
2. إذا كان $|z_A-z_\omega|=|z_B-z_\omega|=|z_C-z_\omega|=|z_D-z_\omega|=r$ نستنتج أنّ النّقط A، B، C ، D تنتمي إلى نفس الدّائرة ذات المركز ω و نصف القطر r.

استقاميّة النقط:

1. إذا كان : $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=k \quad ;k\in\mathbb{R}$ ؛ حيث $A\neq B$
نستنتج أنّ النّقط A، B، C على استقاميّة.
2. إذا كان : $\frac{z_B}{z_A}=k \quad ;k\in\mathbb{R}$ ؛ حيث $A\neq O$
نستنتج أنّ النّقط O، A، B، على استقاميّة.

توازي شعاعيْن أو مستقيميْن:

☑ إذا كان $\frac{z_D-z_B}{z_C-z_A}=k \quad ;k\in\mathbb{R}^*$ ؛ حيث $B\neq D$ و $A\neq C$
نستنتج أنّ $\overrightarrow{BD}//\overrightarrow{AC}$ أو $(BD)//(AC)$.
التعليل: لأنّ العلاقة السابقة تكافئ $z_D-z_B=k(z_C-z_A)$
و هي تعني أنّ $\overrightarrow{BD}//\overrightarrow{AC}$.

تعامد شعاعيْن أو مستقيميْن:

1. إذا كان $\frac{z_D-z_B}{z_C-z_A}=iy \; ;y\in\mathbb{R}^*$ ؛ حيث $B\neq D$ و $A\neq C$
نستنتج أنّ $\overrightarrow{BD}\perp\overrightarrow{AC}$ أو $(BD)\perp(AC)$.
التعليل: لأنّ $\arg\left(\frac{z_D-z_B}{z_C-z_A}\right)=\arg(iy)$
و هذا يعني $(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD})=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$.
2. إذا كان: $\frac{z_B}{z_A}=iy \quad ;y\in\mathbb{R}^*$ ؛ حيث $A\neq O$ و $B\neq O$
نستنتج أنّ $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$ أو $(OA)\perp(OB)$.
التعليل: مثل التعليل السّابق.

طبيعة مثلّث:

1. إذا كان : $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\pm i$ ؛ حيث $A\neq C$ و $A\neq B$
فإنّ المثلّث ABC قائم في A و متساوي السّاقيْن.
التعليل: لأنّ $\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=|\pm i|$ و $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\arg(\pm i)$
أيْ : $\frac{AC}{AB}=1\Rightarrow AC=AB$ و $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$
(حسب التفسير الهندسي للطويلة والعمدة)
2. إذا كان $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=iy \; ;y\in\mathbb{R}^*-\{\pm1\}$ ؛ $A\neq C$ و $A\neq B$
فإنّ المثلّث ABC قائم في A .
التعليل: لأنّ $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\arg(iy)$
أيْ : $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$ (التفسير الهندسي للعمدة).
3. إذا كان : $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$ ؛ حيث $A\neq C$ و $A\neq B$
فإنّ المثلّث ABC متقايس الأضلاع .
التعليل: لأنّ $\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=1$ و $\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$
أيْ : $\frac{AC}{AB}=1\Rightarrow AC=AB$ و $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$
(حسب التفسير الهندسي للطويلة والعمدة)
4. إذا كان : $|z_B-z_A|=|z_C-z_A|=|z_C-z_B|$
فإنّ المثلّث ABC متقايس الأضلاع .
التعليل: لأنّ $AB=AC=BC$ (التفسير الهندسي للطّويلة).
5. إذا كان : $|z_B-z_A|=|z_C-z_A|$
فإنّ المثلّث ABC متساوي السّاقيْن.
التعليل: لأنّ $AB=AC$ (التفسير الهندسي للطّويلة).

☜ ملاحظة:

يمكن التّعرّف على طبيعة مثلث دون اللجوء إلى الأعداد المركّبة ، و ذلك- مثلا- بحساب أطوال أضلاعه ، فإنْ وجدْناها متساوية فهو متقايس الأضلاع ، و إنْ تساوى منها اثنان فقط كان متساوي السّاقيْن و تُستخدَم نظريّة فيطاغورس لمعرفة ما إذا كان قائما أيضا ، أمّا إذا اختلفت أطوال أضلاعه فيبقى لنا أنْ نستخدم نظريّة فيطاغورس فلربّما كان قائما.

✍. طبيعة رباعي:

*متوازي الأضلاع:

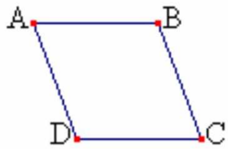


لإثبات أنّ الرّباعي $ABCD$ متوازي أضلاع يكفي أنْ نثبت- مثلا- أنّ: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

أيْ أنّ: $\boxed{z_B-z_A=z_C-z_D}$.

أوْ نثبت أنّ قطريْه متناصفان أي : $\dfrac{z_A+z_C}{2}=\dfrac{z_B+z_D}{2}$.

*المُعيّن:



لإثبات أنّ الرّباعي $ABCD$ معيّن يكفي أنْ نثبت أنّه متوازي أضلاع به ضلعان متعاقبان متقايسان أيْ

- مثلا- أنّ: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ و $AB=AD$

بمعنى : $\boxed{z_B-z_A=z_C-z_D \text{ و } |z_B-z_A|=|z_D-z_A|}$

أوْ نثبت أنّ قطريْه متناصفان و متعامدان أيْ:

$\dfrac{z_A+z_C}{2}=\dfrac{z_B+z_D}{2}$ و $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$ [هذا التّعامد يمكن إثباته باستعمال الجداء السّلمي أو الأعداد المركّبة(انظر الصفحة1)].

*المُستطيل:



لإثبات أنّ الرّباعي $ABCD$ مستطيل يكفي أنْ نثبت أنّه متوازي أضلاع به زاوية قائمة أيْ :

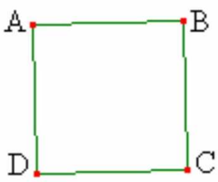
$\boxed{z_B-z_A=z_C-z_D \text{ و } \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}}$

[التّعامد نثبته باستخدام الجداء السّلمي أو الأعداد المركّبة].

- يمكن أيضا لإثبات أنّ الرّباعي $ABCD$ مستطيل أنْ نبيّن أنّ قطريْه متناصفان و متقايسان أيْ:

$\dfrac{z_A+z_C}{2}=\dfrac{z_B+z_D}{2}$ و $|z_C-z_A|=|z_D-z_B|$.

*المُربّع:



لإثبات أنّ الرّباعي $ABCD$ مربّع يكفي أنْ نثبت أنّه معيّن به زاوية قائمة بمعنى آخر نبيّن أنّ :

$\boxed{z_B-z_A=z_C-z_D \text{ و } |z_B-z_A|=|z_D-z_A| \text{ و } \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}}$

أو نثبت أنّ قطريْه متناصفان و متقايسان ومتعامدان أيْ:

$\dfrac{z_A+z_C}{2}=\dfrac{z_B+z_D}{2}$ و $|z_C-z_A|=|z_D-z_B|$ و $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$

أو نثبت أنّ كلّ أضلاعه متقايسة و به زاوية قائمة...إلخ.

☜ ملاحظة:

كما أشرنا بالنسبة للمثلثات ، تبقى الخيارات أمامنا كثيرة للتعرّف على طبيعة أيّ رباعي ، فمثلا لإثبات أنّ الرباعي $ABCD$ معيّن كان يكفي أنْ نبيّن أنّ $AB=BC=CD=DA$ أيْ $|z_B-z_A|=|z_C-z_B|=|z_D-z_C|=|z_A-z_D|$.

✍. مجموعات النّقط:

I. A و B نقطتان متمايزتان و M نقطة لاحقتها z حيث $M\neq A$ و $M\neq B$.

1)مجموعة النّقط M من المستوي بحيث يكون $\dfrac{z_B-z}{z_A-z}$ عددا حقيقيّا هي : $(AB)-\{A,B\}$.

2)مجموعة النّقط M من المستوي بحيث يكون $\dfrac{z_B-z}{z_A-z}$ عددا حقيقيّا موجبا هي : $(AB)-[AB]$.

3)مجموعة النّقط M من المستوي بحيث يكون $\dfrac{z_B-z}{z_A-z}$ عددا حقيقيّا سالبا هي : $[AB]-\{A,B\}$.

II. θعدد حقيقي و A نقطة حيث $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA})=\theta+2k\pi$

مجموعة النّقط M من المستوي بحيث: $\arg(z)=\theta+2k\pi$

هي : $[OA)-\{O\}$.

III. θعدد حقيقي و A و B نقطتان متمايزتان حيث : $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{AB})=\theta+2k\pi$.

مجموعة النّقط M حيث $\arg(z-z_A)=\theta+2k\pi$

هي : $[AB)-\{A\}$.

IV. G نقطة من المستوي وَ k عدد حقيقي موجب تماما

مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق $GM=k$

هي : الدّائرة ذات المركز G وَ نصف القطر k.

V. G وَ H نقطتان متمايزتان من المستوي.

1)مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق $MG=MH$

هي : محور القطعة $[GH]$.

2)مجموعة النقط M من المستوي حيث $\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{MH}=0$

هي : الدائرة ذات القطر GH.

VI. G نقطة من المستوي وَ $\overrightarrow{U}$ شعاع ثابت غير $\vec{0}$.

مجموعة النقط M من المستوي التي تحقق $\overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{U}=0$

هي : المستقيم الذي يشمل النّقطة G وَ يعامد الشعاع $\overrightarrow{U}$.

✍. تحويل عبارتيْ (لايْبنتز) الشّعاعيّة و العدديّة:

ليكن G مرجح الجملة $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ ، لدينا :

$$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$$

$$\alpha MA^2+\beta MB^2+\gamma MC^2=(\alpha+\beta+\gamma)MG^2+\alpha GA^2+\beta GB^2+\gamma GC^2$$

☜ ملاحظة: في حالة مرجح أربع نقط أوْ أكثر، تُحوّل العبارتان بطريقة مماثلة .